ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 99 σχολικού βιβλίου.

Α2.

α)Ψευδής

β) Σελίδα 35 σχολικού βιβλίου αντιπαράδειγμα σχέδιο 34 όπου η g(x) είναι 1-1 αλλά όχι γνησίως μονότονη.

Α3. Σελίδα 216 σχολικού βιβλίου.

Α4.

α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3} = \frac{8+x^3}{x^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{8+\chi^3}{\chi^3} > 0 \Leftrightarrow \chi^3(\chi^3+8) > 0 \Leftrightarrow \chi^3(\chi+2)(\chi^2-2\chi+4) > 0$

Οπότε ο πίνακας προσήμων είναι:

χ	-∞	-2	0	+∞
χ^3	-	-	0	+
χ+2	-	0 +		+
$\chi^2 - 2\chi + 4$	+	+		+
Γιν	+	0 -	0	+

Άρα $f'(x) > 0$ για $\chi \in (-\infty, -2], (0, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ στο $[-2,0]$

x	-∞	-2	0	+∞
$f'(x)$	+	0 -	‖	+
f(x)	↗	↘	‖	↗

τοπ.μεγ.

για $\chi \in (-\infty, -2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα

για $\chi \in [-2,0)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

για $\chi \in (0, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για χ= -2 το f(-2)=-3

Β2. $f''(x) = -\frac{8 \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-24}{x^4} < 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $\mathcal{R}$ -{0} οπότε δεν έχει σημεία καμπής.

Β3. Εξετάζω αν έχει κατακόρυφη ασύπτωτη στο χ=0

$$\lim_{\chi \to 0+} f(\chi) = \lim_{\chi \to 0+} \left(\chi - \frac{4}{\chi^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$

Άρα η ευθεία χ=0 είναι κατακόρυφη ασύπτωτη της f.

Εξετάζω για πλάγιες στο +∞

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1=\lambda$$

$$\lim_{\chi\to+\infty}[f(x)-\lambda\chi]=\lim_{\chi\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}-\frac{4}{x^2}=0=\beta$$

Άρα η ευθεία ψ=χ είναι πλάγια ασύπτωτη της f στο +∞

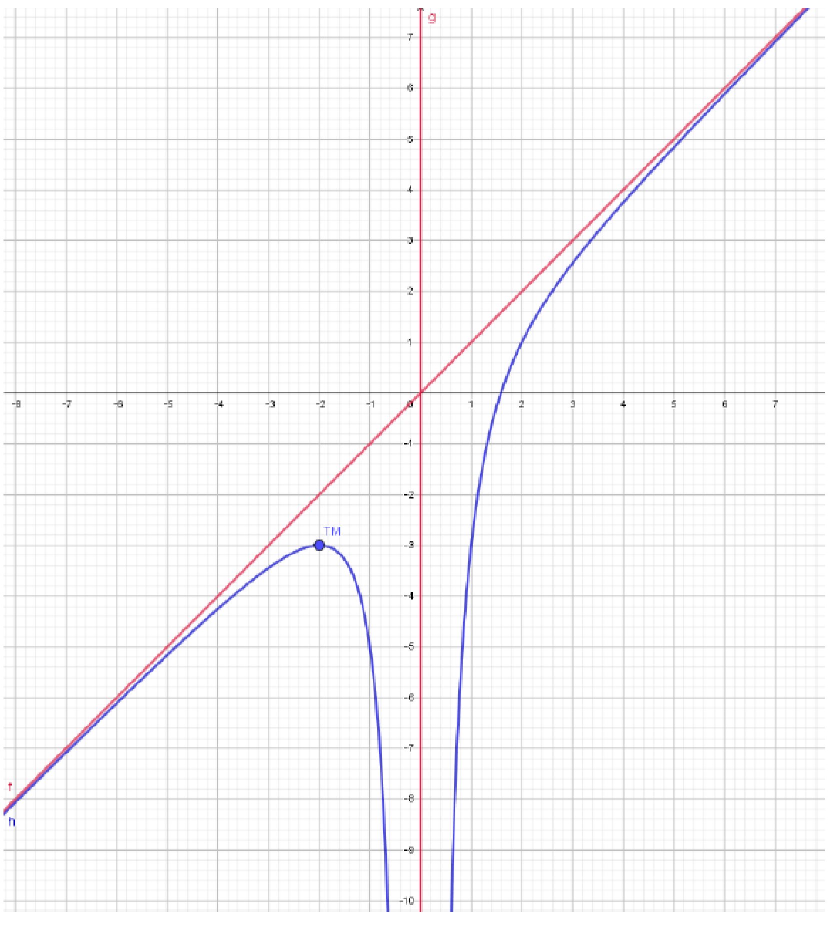
Εξετάζω για πλάγιες στο -∞

$$\lim_{\chi\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1=\lambda$$

$$\lim_{\chi\to-\infty}[f(x)-\lambda\chi]=\lim_{\chi\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}-\frac{4}{x^2}=0=\beta$$

Άρα η ευθεία ψ=χ είναι πλάγια ασύπτωτη της f στο -∞

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η περίμετρος του τετραγώνου είναι χ άρα η πλευρά του είναι $\alpha=\frac{\chi}{4}$m οπότε το εμβαδόν του είναι Ετετ=$(\frac{\chi}{4})^2=\frac{\chi^2}{16}$ m^2, χ∈(0,8).

Το μήκος του κύκλου είναι L=(8-χ)m άρα η ακτίνα του είναι

$2\pi\rho=8-\chi \Leftrightarrow \rho=\frac{8-\chi}{2\pi}$ m άρα το εμβαδόν του κύκλου είναι Εκυκ=$\pi\left(\frac{8-\chi}{2\pi}\right)^2=\pi\frac{64-16\chi+\chi^2}{4\pi^2}=$ $\frac{\chi^2-16\chi+64}{4\pi}$, $\chi\in(0,8)$

Επομένως $E(\chi)=\frac{\chi^2}{16}+\frac{\chi^2-16\chi+64}{4\pi}=\frac{\pi\chi^2+4\chi^2-64\chi+256}{16\pi}=\frac{(\pi+4)\chi^2-64\chi+256}{16\pi}$

Γ2. Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο (0,8) με

$E'(\chi)=\frac{2(\pi+4)\chi-64}{16\pi}$

$E'(\chi)=0 \Leftrightarrow \frac{2(\pi+4)\chi-64}{16\pi}=0$

$2(\pi+4)\chi-64=0$

$2(\pi+4)\chi=64$

$\chi=\frac{32}{\pi+4}$

χ	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
Ε′(χ)	-	0	+
Ε(χ)	↘		↗

Ολ.ελαχιστο

Η Ε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $\chi=\frac{32}{\pi+4}$ m. Για αυτήν την τιμή έχουμε ότι $\alpha=\frac{8}{\pi+4}$ και $\delta=2\rho=\frac{8-\frac{32}{\pi+4}}{\pi}=\frac{8(\pi+4)-32}{\pi(\pi+4)}=\frac{8\pi+32-32}{\pi(\pi+4)}=\frac{8\pi}{\pi(\pi+4)}=\frac{8}{\pi+4}$

Οπότε για $\chi=\frac{32}{\pi+4}$ η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με την διάμετρο του κύκλου

Γ3. Έχουμε

$$\lim_{\chi\to 0+} \mathrm{E}(\chi) = \frac{16}{\pi}$$

$$\lim_{\chi\to 8^-} \mathrm{E}(\chi) = 4$$

$\mathrm{E}(\frac{32}{\pi+4}) = \frac{(\pi+4)\frac{32^2}{(\pi+4)^2} - 64\cdot\frac{32}{\pi+4} + 256}{16\pi} = \frac{32^2 - 64\cdot 32 + 256(\pi+4)}{16\pi(\pi+4)} = \frac{16[64-128+16(\pi+4)]}{16\pi(\pi+4)} = \frac{-64+16\pi+64}{\pi(\pi+4)} = \frac{16\pi}{\pi(\pi+4)} = \frac{16}{\pi+4}$

Επειδή η Ε είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ_1=$(0,\frac{32}{\pi+4}]$ έχουμε $\mathrm{E}(\Delta_1) = \left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{\chi\to 0+}\mathrm{E}(\chi)\right) = [\frac{16}{\pi+4}, \frac{16}{\pi})$

Αφού $\frac{16}{\pi} > 5$ έχω ότι $5 \in \mathrm{E}(\Delta_1)$ και η εξίσωση Ε(χ)=5 έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1 επειδή η Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1.

Επειδή η Ε είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ_2=$[\frac{32}{\pi+4}, 8)$

έχουμε $\mathrm{E}(\Delta_2) = \left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right), \lim_{\chi\to 8^-}\mathrm{E}(\chi)\right) = [\frac{16}{\pi+4}, 4)$

Αφού $5 \notin \mathrm{E}(\Delta_2)$ η εξίσωση Ε(χ)=5 δεν έχει ρίζα στο Δ_2.

Άρα, υπάρχει ένας μόνο τρόπος ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2e^{\chi-\alpha} - 2\chi$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$

Η f′ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = 2e^{\chi-\alpha} - 2 = 2(e^{x-a} - 1)$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(e^{\chi-\alpha} - 1) = 0 \Leftrightarrow e^{\chi-\alpha} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\chi-\alpha} = 1 \Leftrightarrow \chi - \alpha = 0 \Leftrightarrow$$

$$\chi = \alpha$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow e^{\chi-\alpha} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{\chi-\alpha} < 1 \Leftrightarrow \chi - \alpha < 0 \Leftrightarrow \chi < \alpha$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\chi-\alpha} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{\chi-\alpha} > 1 \Leftrightarrow \chi - \alpha > 0 \Leftrightarrow \chi > \alpha$$

χ	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$			

σημείο καμπής

Άρα η f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής το $A(\alpha, 2-\alpha^2)$

Δ2. Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, \alpha]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$\Delta_2 = [\alpha, +\infty)$. Επειδή η f′ είναι συνεχής έχω ότι.

$$f'(\Delta_1) = [f'(a), \lim_{\chi\to-\infty} f'(x)) = [2-2a, +\infty)$$

$$f'(\Delta_2) = \left[f'(a), \lim_{\chi\to+\infty} f'(x)\right) = [2-2a, +\infty)$$

Αφού $\lim_{\chi\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}(2e^{x-a} - 2x) = 2\lim_{\chi\to+\infty}(e^{x-a}(1-\frac{x}{e^{x-a}})) = +\infty$

επειδή $\lim_{\chi\to+\infty}\frac{\chi}{e^{\chi-\alpha}} = \lim_{\chi\to+\infty}\frac{1}{e^{\chi-\alpha}} = 0$

Επειδή $0 \in f'(\Delta_1)$και $0 \in f'(\Delta_2)$ υπάρχουν μοναδικοί $\chi_1 \in (-\infty, \alpha)$και $\chi_2 \in (\alpha, -\infty)$ τέτοιοι ώστε $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$ αφού η f′ είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα Δ_1, Δ_2.

Για κάθε $x < x_1$ έχω $f'(x) > f'(x_{1)}$ και $f'(x) > 0$

Για κάθε $x_1 < x < a$ έχω $f'(x_1) > f'(x)$ και $f'(x) < 0$

Για κάθε $a < x < x_2$ έχω $f'(x) < f'(x_2)$και $f'(x) < 0$

Για κάθε $x > x_2$ έχω $f'(x) > f'(x_2)$και $f'(x) > 0$

Οπότε για την f έχουμε τον παρακάτω πίνακα

χ	$-\infty$		χ_1		1		α		χ_2		$+\infty$
f′(x)		+	0			-			0	+	
f(x)		↗				↘				↗	

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο χ_1 και τοπικό ελάχιστο στο χ_2.

Δ3. . Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ=[α,χ_2] άρα

$$f(\Delta) = [f(x_2), f(a)] = [f(x_2), 2 - a^2]$$

Θα δείξω ότι $f(1) \notin f(\Delta)$ δηλαδή $f(1) > 2 - a^2 \Leftrightarrow 2e^{1-a} - 1 > 2 - a^2 \Leftrightarrow 2e^{1-a} + a^2 - 3 > 0$.

Θεωρώ την συνάρτηση $g(x)=2e^{1-x} + x^2 - 3$ με $\chi \geq 1$ και $g(1) = 0$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο [1,+∞) με $g'(x)=-2e^{1-x} + 2x$

Για κάθε χ> 1 έχω $-\chi < -1 \Leftrightarrow 1 - \chi < 0 \Leftrightarrow e^{1-x} < 1 \Leftrightarrow -2e^{1-x} > -2 \Leftrightarrow -2e^{1-x} + 2x > 2x - 2$

Άρα $g'(x) > 2(x - 1) > 0$ *για κάθε* $\chi > 1$

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο [1,+∞) και η χ=1 είναι μοναδική ρίζα της g(x)=0. Για κάθε $\chi > 1 \Leftrightarrow g(x) > g(1) \Leftrightarrow g(x) > 0$

Άρα $g(a) > 0 \Leftrightarrow 2e^{1-a} + a^2 - 3 > 0$ *για κάθε* $\alpha > 1$.

Δ4. Για α=2 έχω $f(x) = 2e^{x-2} - x^2$, με $\chi \in \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2e^{x-2} - 2x$ για κάθε $\chi \in \mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο $A(2, -2)$ είναι $y - f(2) = f'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y + 2 = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 2$

Επειδή η f είναι κυρτή στο [2,+∞) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α βρίσκεται κάτω από αυτήν με εξαίρεση το σημείο επαφής τους Α.

Επομένως ισχύει $f(x) \geq -2x + 2$ για κάθε $x \geq 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 2$.

Άρα ισχύει $f(x)\cdot\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$ αφού $x \geq 2$, με το «=» να ισχύει μόνο για $x = 2$.

Άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx \geq \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$

Έστω $I=\int_2^3(-2x+2)\sqrt{x-2}\,dx$

Θέτω $u=\sqrt{x-2}, x-2=u^2, dx=2udu$

Για x=2,u=0 και x=3,u=1

$I=\int_0^1[-2(u^2+2)+2]u2udu$

$I=-4\int_0^1(u^4+u^2)du=-4\left[\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right]_0^1=-4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{32}{15}$

Οπότε ισχύει $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}$

Γιάννης Γυφτόπουλος
Μαθηματικός