ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1) α) Ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 15
β) i) Ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 35
ii) Ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 36
Α2) Διατύπωση θεωρήματος σχολικό βιβλίο σελίδα 142
Α3) Απόδειξη θεωρήματος σχολικό βιβλίο σελίδα 135
Α4) α) Λάθος
Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$ αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
β) Λάθος
Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ 2, & x=0\end{cases}$
Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=-1\neq f(0)=2$
Α5) Σωστή απάντηση το γ

ΘΕΜΑ Β

Β1) Επειδή η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία y=2 ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=2\Leftrightarrow 0+\lambda=2\Leftrightarrow\lambda=2$
Γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

Β2) Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2$ στο [2,3].
Η h είναι συνεχής στο [2,3] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο [2,3] με $h'(x)=-e^{-x}-1<0$ για κάθε $x\in[2,3]$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1.
$h(2)=e^{-2}-2+2=e^{-2}>0$
$h(3)=e^{-3}-3+2=e^{-3}-1=\frac{1}{e^3}-1=\frac{1-e^3}{e^3}<0$
Άρα $h(2)\cdot h(3)<0$ οπότε από Θ. Bolzano η εξίσωση h(x)=0 δηλαδή η f(x)-x=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3) και επειδή η h είναι 1-1 είναι και μοναδική.

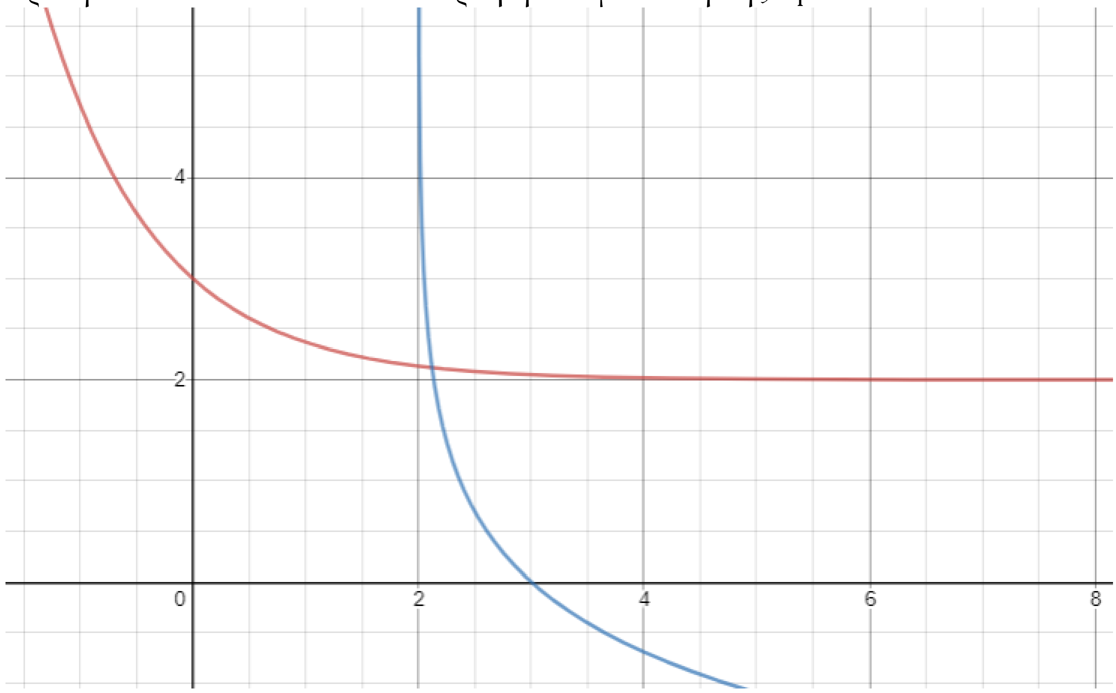
Β3) $f'(x)=-e^{-x}<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1 άρα αντιστρέφεται.
$$y=f(x)\Leftrightarrow y=e^{-x}+2\Leftrightarrow y-2=e^{-x}\ ,y>2\Leftrightarrow \ln(y-2)=\ln e^{-x}\Leftrightarrow \ln(y-2)=-x\Leftrightarrow x=-\ln(y-2)\ ,y>2$$
Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)\ ,x\in(2,+\infty)$

B4) $\lim\limits_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}[-\ln(x-2)] = \lim\limits_{u\to 0^+}[-\ln u] = +\infty$

Θέτω $u=x-2$

Αν $x\to 2^+ \Rightarrow u \to 0^+$

Άρα η ευθεία x=2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ άρα

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2 + a) = 1 + \alpha$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(e^{x-1} + \beta x) = 1 + \beta$

$f(1)=1+\alpha$

άρα $1+\alpha=1+\beta \Leftrightarrow \alpha=\beta$ (1)

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ ισχύει

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\beta}{x-1} \underset{dlh}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\beta}{1} = 1+\beta$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+a-1-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 2$$

Άρα $\beta+1=2 \Leftrightarrow$ **$\beta = 1$ άρα και α=1**

Γ2) Είναι f(x)= $\begin{cases} x^2+1 &, x \geq 1 \\ e^{x-1}+x &, x<1 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R με f′(x)= $\begin{cases} 2x &, x \geq 1 \\ e^{x-1} &, x<1 \end{cases}$

Για x≥ 1 είναι 2x≥ 2 > 0 άρα f γνησίως αύξουσα στο [1,+∞)

Για x< 1 είναι $e^{x-1}+1>1>0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1)$

Και επειδή η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το R.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1}+x = 0+(-\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2+1 = +\infty$

Άρα f(A)= $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = (-\infty,+\infty) = R$.

Γ3) i) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(-\infty,0]$ οπότε

$f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, \frac{1}{e}]$

Το 0 ∈ $f(A_1)$ άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει αρνητική ρίζα x_0 η οποία είναι και μοναδική αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii) Για x ∈ $(x_0,+\infty)$ έχω : $f^2(x)-x_0f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)(f(x)-x_0)=0$

$x>x_0 \xLeftrightarrow{f\ \gamma\nu\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha} f(x)>f(x_0) \Leftrightarrow f(x)>0$

f(x)> 0 $\kappa\alpha\iota\ x_0<0 \Leftrightarrow -x_0>0 \Leftrightarrow f(x)-x_0>0$

άρα πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε $f(x)(f(x)-x_0)>0$ άρα η εξίσωση $f^2(x)-x_0f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$.

Γ4) Για x≥ 1 έχουμε

$E=\frac{1}{2}(OK)(KM) = \frac{1}{2}|x||f(x)| = \frac{1}{2}x(x^2+1) = \frac{1}{2}(x^3+x)$

Το εμβαδόν συναρτήσει του χρόνου είναι

$E(t)=\frac{1}{2}\left(x^3(t)+x(t)\right)$

$E'(t)=\frac{1}{2}\left(3x^2(t)x'(t)+x'(t)\right)$

Για t= t_0 είναι $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$ άρα

$E'(t_0) = \frac{1}{2}(3x^2(t_0)x'(t_0)+x'(t_0)) = \frac{1}{2}(3\cdot 3^2\cdot 2+2) = 28\frac{cm^2}{sec}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) Έχουμε f(1)=1 και f′(1)=−1

$f(1)=1 \Leftrightarrow \alpha+\beta=1$ (1)

$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\cdot(x-1)+a$

$f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+a$

$f'(1)=-1 \Leftrightarrow \ln1+\frac{2(1-1)^2}{1-2+2}+a=-1 \Leftrightarrow a=1$ και από (1)$\beta=2$

Δ2) E=$\int_1^2 |f(x)-(-x+2)|\,dx = \int_1^2 |f(x)+x-2|\,dx =$
$\int_1^2 |(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2+x-2|\,dx = \int_1^2 |(x-1)\ln(x^2-2x+2)|\mathrm{d}x$
Για κάθε x ∈[1,2] $(x-1)\ln(x^2-2x+2) \geq 0$
Άρα E=$\int_1^2 (x-1)\ln(x^2-2x+2)\,dx$
Θέτω $x^2-2x+2 = u \; άρα \; 2(x-1)dx = du$
Όταν x= $1 \Rightarrow u_1 = 1 \; και \; όταν \; x = 2 \Rightarrow u_2 = 2$
Άρα $E = \frac{1}{2}\int_1^2 lnudu = \frac{1}{2}\int_1^2 u' lnudu = \frac{1}{2}[ulnu]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 u\frac{1}{u}du = \frac{1}{2}(2ln2 - 1ln1) -$
12u12=ln2−12 τ.μ.

Δ3) i) Έχουμε ότι f′(x)= $\ln(x^2-2x+2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} - 1$
Οπότε:
f′(x)≥ $-1 \Leftrightarrow \ln(x^2-2x+2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2} - 1 \geq -1 \Leftrightarrow$
$\ln[(x-1)^2+1] + \frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1} \geq 0$ που ισχύει γιατί

$(x-1)^2+1 \geq 1 \; άρα \; ln(x-1)^2+1 \geq ln1 \; άρα \; ln(x-1)^2+1 \geq 0$ και
$\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2+1} \geq 0$
ii) Η f συνεχής στο [λ,λ+$\frac{1}{2}$] και παραγωγίσιμη στο (λ,λ+$\frac{1}{2}$).
Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ξ ∈(λ,λ+$\frac{1}{2}$) τέτοιο ώστε: f′(ξ)=$\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda} = \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$
Έχουμε όμως f′(ξ)≥ $-1 \Rightarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}} \geq -1 \Rightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow$
$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda-1)\ln(\lambda^2-2\lambda+2) + \frac{3}{2}$

Δ4) Έστω A$(x_1, f(x_1))$ και B$(x_2, g(x_2))$ τα σημεία επαφής των C_f, C_g με τις εφαπτομένες τους αντίστοιχα
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο A$(x_1, f(x_1))$ είναι:
$(\varepsilon_1): y - f(x_1) = f'(x_1)(x-x_1) \Rightarrow y = f'(x_1)x + f(x_1) - f'(x_1)x_1$
Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο B$(x_2, g(x_2))$ είναι:
$(\varepsilon_1): y - g(x_2) = g'(x_2)(x-x_2) \Rightarrow y = g'(x_2)x + g(x_2) - g'(x_2)x_2$
Η C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη αν και μόνο αν:
$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_1) = -3x_2^2 - 1 \\ f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \end{cases}$$

f′$(x_1) \geq -1$ και $-3x_2^2 - 1 \leq -1$
άρα f′$(x_1) = -1$ και $-3x_2^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow$ f′$(x_1) = -1$ και $x_2 = 0$

$f'(x_1) = -1 \Leftrightarrow \ln[(x_1-1)^2+1] + \frac{2(x_1-1)^2}{(x_1-1)^2+1} - 1 = -1$

$\ln[(x_1-1)^2+1] + \frac{2(x_1-1)^2}{(x_1-1)^2+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln[(x_1-1)^2+1] = 0 \\ \frac{2(x_1-1)^2}{(x_1-1)^2+1} = 0 \end{cases} \quad x_1 = 1$

Για τις τιμές $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$ έχουμε :

$$f(x_1) - f'(x_1)x_1 = g(x_2) - g'(x_2)x_2 \Leftrightarrow f(1) - f'(1) = g(0) \Leftrightarrow -1 = -1$$

Άρα την επαληθεύει.

Άρα οι τιμές $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$ είναι δεκτές αφού επαληθεύουν όλες τις σχέσεις και άρα η κοινή εφαπτομένη είναι:

$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \Leftrightarrow y = -(x-1) + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$

Οι τιμές των και $x_1 = 1$ και $x_2 = 0$ είναι μοναδικές και άρα η κοινή εφαπτομένη είναι μοναδική.

Γιάννης Γυφτόπουλος
Μαθηματικός