ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

(ΓΕΛ/ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 76.

Α2. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β] του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει:

$\lim_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} \in \mathbb{R}$

Α3. α) Ψ

β) Η συνάρτηση f(x)=x^3 αν και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχει παράγωγο f′(x)=3x^2 η οποία δεν είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$ αφού f′(0)=0

Α4. α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΣΩΣΤΟ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. A_f=(1,+∞) και $A_g = \mathbb{R}$

Η fog ορίζεται στο σύνολο $A_{fog} = \{x \in A_g \; και \; g(x) \in A_f\} =$

$\{x \in \mathbb{R} \; και \; e^x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \; και \; x > 0\} = (0,+\infty)$

και (fog)(x)=f(g(x))=$\frac{e^x+2}{e^x-1}$, x> 0

Β2. Έστω h(x)=(fog)(x)=$\frac{e^x+2}{e^x-1}$, x> 0

Για κάθε x> 0 h′(x)=$\frac{e^x(e^x-1)-(e^x+2)e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-2e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x-1)^2} < 0$ για κάθε x> 0 άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,+∞) άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Το σύνολο τιμών της h είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης. Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_h = (0, +\infty)$ με σύνολο τιμών

h(A)=$(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0}) = (1, +\infty)$.

Άρα το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι $A_{h^{-1}} = (0, +\infty)$

h(x)=y $\Leftrightarrow \frac{e^x+2}{e^x-1} = y \Leftrightarrow e^x + 2 = y(e^x - 1) \Leftrightarrow e^x + 2 = ye^x - y \Leftrightarrow$

$$ye^x - e^x = y + 2 \Leftrightarrow e^x(y-1) = y + 2 \Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow x = \ln\frac{y+2}{y-1}, y > 1$$

Άρα $h^{-1}(x) = \ln\frac{x+2}{x-1}, x > 1$

B3. Για κάθε x> 1 η φ(x)= $\ln\frac{x+2}{x-1}$ γράφεται

φ(x)=ln(x+2)-ln(x-1) η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (1,+∞) με

φ′(x)=$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-1} = \frac{-3}{(x+2)(x-1)} < 0$ για κάθε x> 1 άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο (1,+∞).

B4. $\mathrm{Lim}_{x\to1^+}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

Θέτουμε u=$\frac{x+2}{x-1}$ άρα $u_0 = \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}(x+2)\frac{1}{x-1} = +\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to1^+} x + 2 = 3 > 0$ και $\lim\limits_{x\to1^+} x - 1 = 0$ με x−1 > 0 κοντά στο 1^+ άρα

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = +\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to1^+} ln\frac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{u\to+\infty} lnu = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln\frac{x+2}{x-1}$

Θέτουμε u=$\frac{x+2}{x-1}$ άρα $u_0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln\frac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{u\to1} lnu = 0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι συνεχής στο $(-\infty, \frac{3\pi}{2})$ θα είναι συνεχής και στο x=0 άρα

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0) \text{ δηλαδή } 1-\ln\lambda=\lambda \Leftrightarrow \ln\lambda+\lambda-1=0,\ \lambda>0$$

Έστω g(x)=lnx+x-1 , x>0 η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) με

g′(x)=$\frac{1}{x} + 1 > 0$ για κάθε x>0 άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο (0,+∞) και επειδή η εξίσωση g(x)=0 έχει προφανή ρίζα το x=1 θα είναι μοναδική άρα

$$\ln\lambda+\lambda-1=0 \Leftrightarrow g(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Γ2. Άρα f(x)=$\begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x(1-x)}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1-x}=1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1$$

Άρα f′(0)=1 άρα ορίζεται η εφαπτομένη της f για x=0 και επειδή f′(0)=1=εφ$\frac{\pi}{4}$ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x′x είναι ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Γ3. Τα κρίσιμα σημεία της f αν έχει είναι τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της στα οποία η παράγωγος μηδενίζεται.

Για x<0 f′(x)=$\frac{1}{(1-x)^2}>0$

Για x ∈ $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ f′(x)=συνx-ημx

f′(x)=0 $\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{5\pi}{4}$

άρα τα κρίσιμα σημεία της f είναι $x=\frac{\pi}{4}$ $\kappa\alpha\iota\ x=\frac{5\pi}{4}$

Γ4. Η εξίσωση εφαπτομένης της f στο Μ είναι y-f(α)=f′(α)(x-α).

Το σημείο τομής με τον x′x για y=0 είναι $-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-\alpha)\Leftrightarrow x-\alpha=\alpha-1\Leftrightarrow$ $x=2\alpha-1$ άρα Β(2α-1,0). Οπότε

$x(t)=2\alpha(t)-1\Leftrightarrow x'(t)=2\alpha'(t)=-\frac{2}{3}\alpha(t)$

Για t=t_0 έχω x′$(t_0)=-\frac{2}{3}\alpha(t_0)=-\frac{2}{3}(-1)=\frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο ℝ με f′(x)=e^x+2x-e

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση f′(x)=0 έχει μια μόνο ρίζα και αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν αυτής.

f′′(x)=$e^x+2>0$ για κάθε x ∈ ℝ άρα η f′ είναι γνησίως αύξουσα στο ℝ.

Η f′ είναι συνεχής στο [0,1]

f′(0)=1-e<0 και f′(1)=2>0 άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 στο (0,1) με f′(x_0)=0 το οποίο είναι μοναδικο αφού η f′ είναι γνησίως αύξουσα.

f′$(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0$ άρα $e^{x_0}=e-2x_0 (1)$

έχουμε για x>x_0 $\xLeftrightarrow{f'\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha} f'(x)>f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)>0$

για x<x_0 $\xLeftrightarrow{f'\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha} f'(x)<f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)<0$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ οπότε η f στο x_0 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το

$\mathrm{f}(x_0) = e^{x_0} + {x_0}^2 - ex_0 - 1$ από (1)

$\mathrm{f}(x_0) = e - 2x_0 + {x_0}^2 - ex_0 - 1 = {x_0}^2 - (e+2)x_0 + e - 1$

Δ2. $\lim\limits_{x \to x_0} [\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)]$

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)-f(x_0)} = +\infty$ γιατί $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ και $f(x) > f(x_0)$ για κάθε $x \neq x_0$

Επίσης για $x \neq x_0$ έχουμε $\eta\mu(\frac{1}{x-x_0}) \geq -1$ άρα

$\frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) \geq \frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1$ και επειδή

$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)-f(x_0)} - 1 = +\infty$ έχουμε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right) = +\infty$

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-x_0$ η οποία είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ και $g(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$ και $g(x_0) = f(x_0) < 0$ άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ στο $(x_0, 1)$ δηλαδή

$g(\rho)=0$ δηλαδή $f(\rho)=x_0 - \rho$ η οποία είναι μοναδική γιατί $g'(x)=f'(x)+1>0$ αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x>x_0$ από Δ1.

Δ4. $\mathrm{f}(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow \mathrm{f}(x_0) > (x_0 - \rho)(f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow$

$$f'(\kappa) + 1 > \frac{f(x_0)}{x_0 - \rho} \Leftrightarrow f'(\kappa) > \frac{f(x_0)}{x_0 - \rho} - 1 \Leftrightarrow f'(\kappa) > \frac{f(x_0) - x_0 + \rho}{x_0 - \rho} \Leftrightarrow$$

$$f'(\kappa) > \frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho}$$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ στο $[x_0, \rho]$ άρα υπάρχει $\xi \epsilon (x_0, \rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho - x_0}$. Άρα για $\xi<\kappa \Leftrightarrow f'(\xi) < f'(\kappa) \Leftrightarrow \frac{f(\rho)-f(x_0)}{\rho - x_0} < f'(\kappa)$ αφού f′ γνησίως αύξουσα.

Γιάννης Γυφτόπουλος