ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. β **Α2.** γ **Α3.** α **Α4.** γ

Α5. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1

Η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή.

Πριν από την κρούση έχουμε:

$u_s = \frac{u_H}{20}$ και $f_1 = \frac{u_H}{u_H+u_s} f_s \Rightarrow f_1 = \frac{u_H}{u_H+\frac{u_H}{20}} f_s \Rightarrow f_1 = \frac{20}{21} f_s$ (1)

Από Αρχή Διατήρησης της Ορμής, υπολογίζουμε την ταχύτητα των m_1 και m_2:

$\overrightarrow{Po\lambda_{\alpha\rho\chi}} = \overrightarrow{Po\lambda_{\tau\varepsilon\lambda}} \Rightarrow m_1 u_s = (m_1 + m_2) u_s' \Rightarrow u_s' = \frac{u_s}{2} = \frac{u_H}{40}$ m/s

Άρα: $f_2 = \frac{u_H}{u_H+u_s'} f_s \Rightarrow f_2 = \frac{u_H}{u_H+\frac{u_H}{40}} f_s \Rightarrow f_2 = \frac{40}{41} f_s$ (2)

Με διαίρεση των (1) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{20}{21}f_s}{\frac{40}{41}f_s} = \frac{41}{42}$$

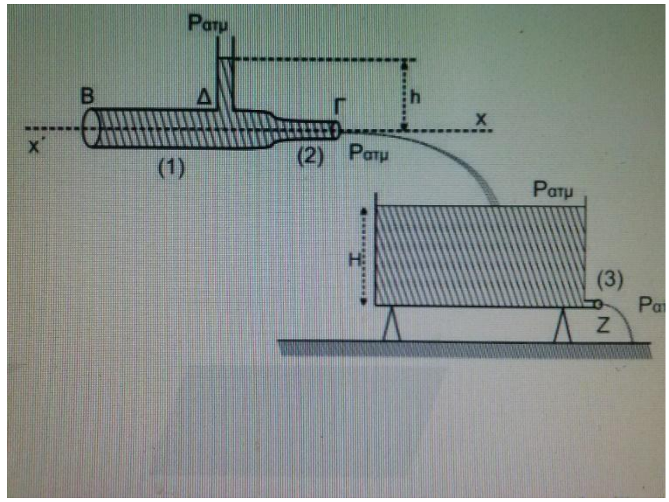
Σωστή απάντηση το ii.

Β2

Εφαρμόζουμε Bernoulli για τη ρευματική γραμμή 1 → 2.

$p_1 + \frac{1}{2}\varrho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho u_2^2$ (1)

Από την εξίσωση της συνέχειας υπολογίζουμε την ταχύτητα στο σημείο 1.



$A_1 u_1 = A_2 u_2 \Rightarrow 2A_2 u_1 = A_2 u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{u_2}{2}$ (2)

Επίσης έχουμε: $p_1 = p_{ατμ} + \varrho g h$ και $p_2 = p_{ατμ}$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$p_{ατμ} + \varrho g h + \frac{1}{2}\varrho\frac{u_2^2}{4} = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\varrho u_2^2 \Rightarrow h = \frac{3u_2^2}{8g}$ (4)

Στο σημείο Ε της επιφάνειας της δεξαμενής έχουμε $u_E = 0$. Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ του σημείου Ε της επιφάνειας και του σημείου εξόδου (3).

$p_{ατμ} + \frac{1}{2}\varrho u_E^2 + \varrho g H = p_{ατμ} + \frac{1}{2}\varrho u_3^2$ (5)

Για να παραμένει η επιφάνεια του ρευστού σταθερή, πρέπει να ισχύει:

$\Pi_2 = \Pi_3 \Rightarrow \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = \frac{\Delta V_3}{\Delta t} \Rightarrow A_2 u_2 = A_3 u_3 \Rightarrow A_2 u_2 = \frac{A_2}{2} u_3 \Rightarrow u_3 = 2u_2$ (6)

Από τις σχέσεις (5) και (6) παίρνουμε:

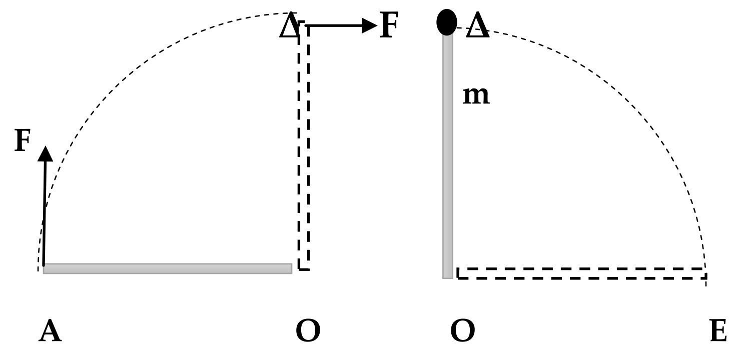
$\varrho g H = \frac{1}{2}\varrho 4u_2^2 \Rightarrow H = \frac{2u_2^2}{g}$ (7)

Με διαίρεση των σχέσεων (4) και (7) παίρνουμε;

$$\frac{h}{H} = \frac{\frac{3u_2^2}{8g}}{\frac{2u_2^2}{g}} \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{3}{16}$$

Σωστή απάντηση το iii.

Β3



Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Κ.Ε. από τη θέση ΟΑ μέχρι τη θέση ΟΔ για να υπολογίσουμε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου στο σημείο Δ.

$K_{τελ} - K_{αρχ} = W_{ολ} \Rightarrow \frac{1}{2} I_o \cdot \omega_{\Delta}^2 - 0 = W_F \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} M \cdot L^2 \cdot \omega_{\Delta}^2 = F \cdot L \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\omega_{\Delta} = 3\pi$ rad/s

Εφαρμόζοντας την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής για τη κρούση της ράβδου με το σώμα, παίρνουμε:

$\overrightarrow{L_{αρχ}} = \overrightarrow{L_{τελ}} \Rightarrow I_ο \cdot \omega_{\Delta} = I_{συστ} \cdot \omega_{τελ} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 \cdot \omega_{\Delta} = (\frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2 + mL^2) \cdot \omega_{τελ} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega_{τελ} = \frac{3\pi}{2}$ rad/s η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδος – σώμα μετά τη κρούση.

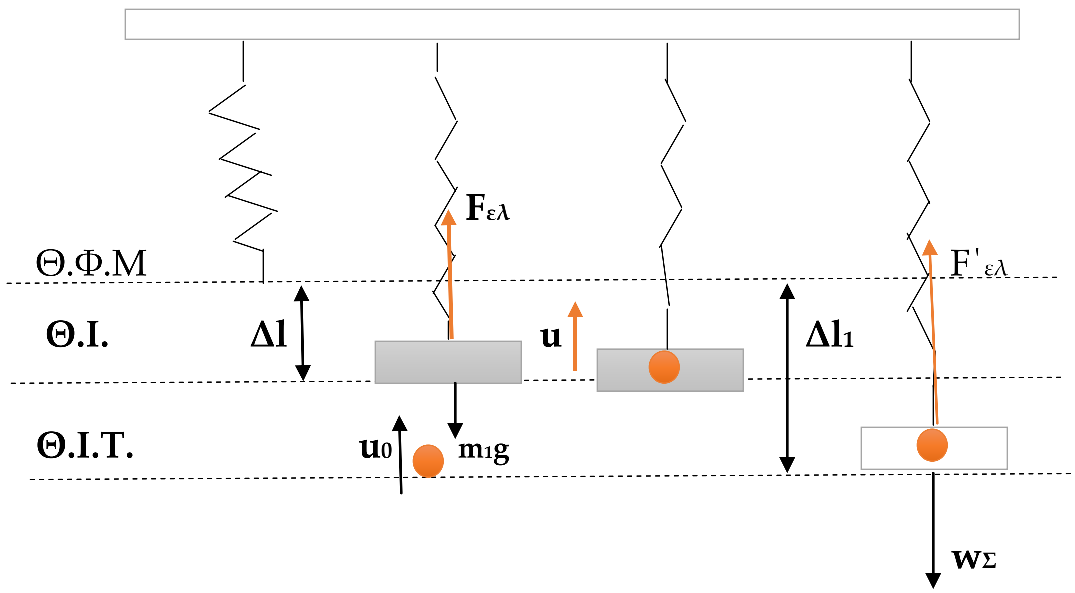
Αφού καταργείται η δύναμη μετά τη κρούση, το σύστημα εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με $\omega = \omega_{τελ}$. Άρα:

$\omega_{τελ} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega_{τελ}} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{3}$ sec

Σωστή απάντηση το ii

ΘΕΜΑ Γ

Γ1



Για τη θέση ισορροπίας του Σ_1 έχουμε:

$F_{\varepsilon\lambda} = B \Rightarrow K \cdot \Delta l = m_1 \cdot g \Rightarrow K = \frac{m_1 g}{\Delta l} = 200$ N/m

Για τη θέση ισορροπίας της ταλάντωσης του συσσωματώματος έχουμε:

$K \cdot \Delta l_1 = (m_1 + m_2) \cdot g \Rightarrow \Delta l_1 = 0,1$ m

Αφού το συσσωμάτωμα φτάνει στη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου, το Δl_1 είναι το πλάτος της ταλάντωσης.

Γ2 Έστω u η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά τη κρούση. Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ και παίρνουμε;

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 + \frac{1}{2}K(\Delta l_1 - \Delta l)^2 = \frac{1}{2}K \cdot A^2 \Rightarrow u^2 = \frac{K}{m_1+m_2}[A^2 - (\Delta l_1 - \Delta l)^2] \Rightarrow$

$u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s

Εφαρμόζοντας ΑΔΟ για την κρούση των m_1 και m_2, υπολογίζουμε την ταχύτητα του m_2 πριν την κρούση.

$m_2 u_0 = (m_1 + m_2)u \Rightarrow u_0 = 2u \Rightarrow u_0 = \sqrt{3}$ m/s

Άρα, η κινητική ενέργεια του m_2 είναι:

$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot u_0^2 \Rightarrow K_2 = \frac{3}{2}$ J

Γ3 Για την ορμή του σώματος $Σ_2$ έχουμε:

Πριν από την κρούση:

$P_2 = m_2 \cdot u_0 \Rightarrow P_2 = \sqrt{3}$ Kg $\cdot \frac{m}{s}$

Μετά την κρούση, το $Σ_2$ αποτελεί μέρος του συσσωματώματος και κινείται με ταχύτητα u. Έχουμε:

$P_2' = m_2 \cdot u \Rightarrow P_2' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Kg $\cdot \frac{m}{s}$

Άρα: $ΔP = P_2' - P_2 \Rightarrow ΔP = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ Kg $\cdot \frac{m}{s}$ με κατεύθυνση αντίθετη της αρχικής ορμής.

Γ4 Η εξίσωση της θέσης του συσσωματώματος, είναι:

$x = Αημ(ωt + φ_0)$. Αφού το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ δεν βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του, έχουμε αρχική φάση.

Για $t = 0$ παίρνουμε:

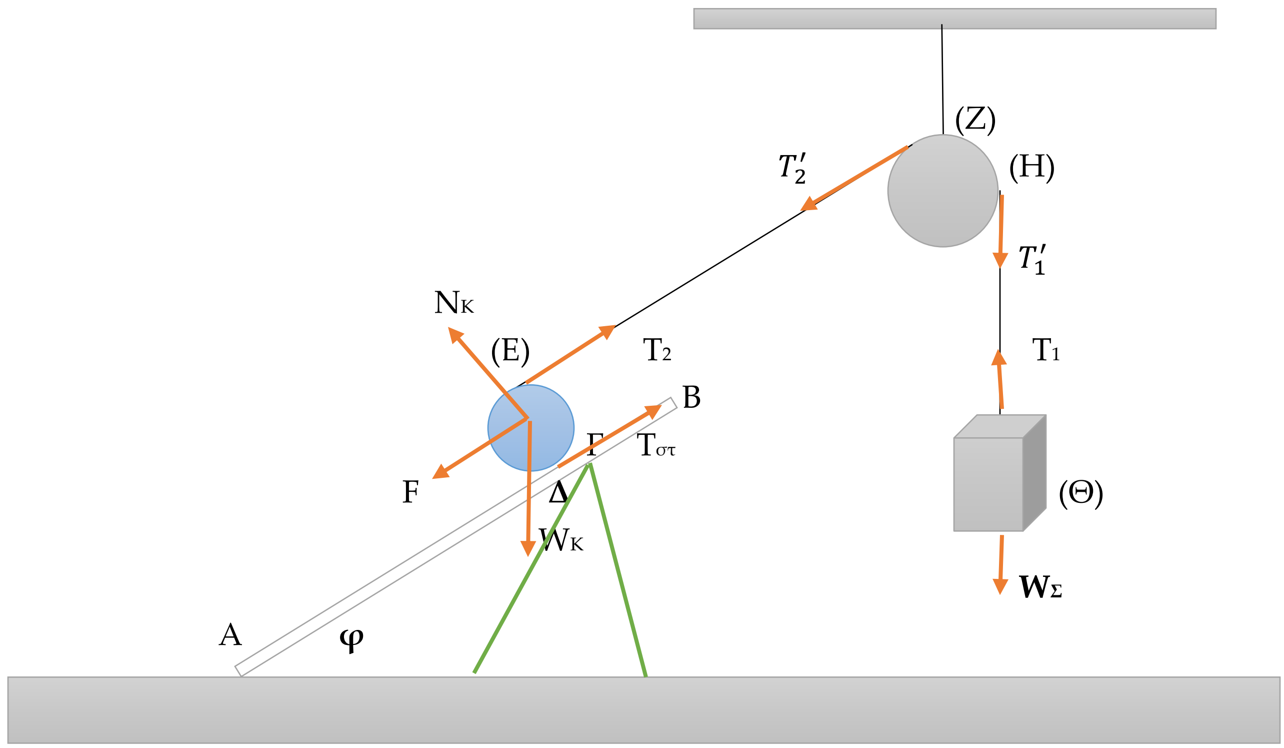
$\frac{A}{2} = Αημφ_0 \Rightarrow ημφ_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow ημφ_0 = ημ\frac{\pi}{6}$

Υπολογίζουμε την κυκλική συχνότητα:

$ω = \sqrt{\frac{K}{m_1+m_2}} \Rightarrow ω = 10$ rad/s

Άρα, έχουμε: $x = 0{,}1ημ(10t + \frac{\pi}{6})$ (S.I.)

ΘΕΜΑ Δ



Δ1 Για το σώμα Σ ισχύει: $ΣF_y = 0 \Rightarrow T_1 = W_Σ \Rightarrow T_1 = 20$ N

Το νήμα είναι αβαρές και μη εκτατό, άρα $T_1' = T_1 = 20$ N

Για την τροχαλία ισχύει:

$Στ = 0 \Rightarrow T_1' R_T - T_2' R_T = 0 \Rightarrow T_2' = T_1' = 20$ N

Το νήμα που συνδέει την τροχαλία με τον κύλινδρο είναι αβαρές και μη εκτατό, άρα:

$T_2' = T_2 = 20$ N

Για τον κύλινδρο ισχύει:

$Στ = 0 \Rightarrow T_2 R_K - T_{στ} R_K = 0 \Rightarrow T_{στ} = T_2 = 20$ N

$ΣF_x = 0 \Rightarrow T_2 + T_{στ} - F - Wημφ = 0 \Rightarrow 20 + 20 - F - 10 = 0 \Rightarrow F = 30$ N

Δ2 Μετά την κατάργηση της δύναμης F, το σύστημα αρχίζει να κινείται.

Για τα σημεία Ε, Ζ, Η και Θ ισχύουν οι σχέσεις:

$\alpha_\Theta = \alpha_{H\varepsilon} = \alpha_{Z\varepsilon} = \alpha_E$, λόγω της σύνδεσής τους με το νήμα.

Το σημείο Ε είναι το ανώτερο σημείο του κυλίνδρου, άρα ισχύει ότι $\alpha_E = 2\alpha_{cmK}$, οπότε παίρνουμε $\alpha_\Theta = 2\alpha_{cmK}$.

'Ομως, $\alpha_{cmK} = \alpha_{\gamma K} \cdot R_K$

Για τα σημεία Η και Ζ ισχύει:

$\alpha_{H\varepsilon} = \alpha_{Z\varepsilon} = R_T \cdot \alpha_{\gamma T} \Rightarrow \alpha_{H\varepsilon} = \alpha_{Z\varepsilon} = \alpha_\Sigma = 2\alpha_{cmK}$

Για το σώμα Σ ισχύει:

$\Sigma F_y = M_\Sigma \cdot \alpha_\Sigma \Rightarrow M_\Sigma \cdot g - T_1 = M_\Sigma \cdot 2\alpha_{cmK}$ (1)

Για την τροχαλία ισχύει:

$\Sigma\tau = I_T \cdot \alpha_{\gamma T} \Rightarrow T_1' \cdot R_T - T_2' \cdot R_T = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot R_T^2 \cdot \alpha_{\gamma T} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot \alpha_{Z\varepsilon} \Rightarrow$

$T_1 - T_2 = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot 2\alpha_{cmK} \Rightarrow T_1 - T_2 = M_T \cdot \alpha_{cmK}$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη, παίρνουμε:

$M_\Sigma \cdot g - T_2 = (2M_\Sigma + M_T)\, \alpha_{cmK}$ (3)

Για τον κύλινδρο έχουμε:

$\Sigma F_x = M_K \cdot \alpha_{cmK} \Rightarrow T_2 - W_K \cdot \eta\mu\varphi + T_{\sigma\tau} = M_K \cdot \alpha_{cmK} \Rightarrow$

$T_2 - M_K \cdot g \cdot \eta\mu\varphi + T_{\sigma\tau} = M_K \cdot \alpha_{cmK}$ (4)

και $\Sigma\tau = I_K \cdot \alpha_{\gamma K} \Rightarrow T_2 \cdot R_K - T_{\sigma\tau} \cdot R_K = \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot \alpha_{\gamma K} \Rightarrow$

$T_2 - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot \alpha_{cmK}$ (5)

Προσθέτοντας τις (4) και (5) κατά μέλη, παίρνουμε:

$2T_2 - M_K \cdot g \cdot \eta\mu\varphi = \frac{3}{2} \cdot M_K \cdot \alpha_{cmK}$

Λύνοντας το σύστημα (3) και (6) παίρνουμε:

$2M_Σ \cdot g - M_K \cdot g \cdot ημφ = (\frac{3}{2} \cdot M_K + 4M_Σ + 2M_T)\, α_{cmK}$ =>

$α_{cmK} = 2\ m/s^2$

οπότε προκύπτει: $α_Θ = 2α_{cmK} = 4\ m/s^2$

Δ3 Η ταχύτητα του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,5$ s όπου κόβουμε το νήμα, είναι:

$u_{cm1} = α_{cmK} \cdot t_1$ => $u_{cm1} = 1\ m/s$

Μετά το κόψιμο του νήματος, ο κύλινδρος εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση.

$ΣF_x = M_K \cdot α'_{cmK}$ => $T_{στ} - M_K \cdot g \cdot ημφ = M_K \cdot α'_{cmK}$ (1)

$Στ = I_K \cdot α'_{γK}$ => $-T_{στ} \cdot R_K = \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot R_K^2 \cdot α'_{γK}$ => $-T_{στ} = \frac{1}{2} \cdot M_K \cdot α'_{cmK}$ (2)

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη, παίρνουμε:

$- M_K \cdot g \cdot ημφ = \frac{3}{2} \cdot M_K \cdot α'_{cmK}$ => $α'_{cmK} = -\frac{10}{3}\ m/s^2$

Για την επιβραδυνόμενη κίνηση του κυλίνδρου έχουμε:

$u_{cm} = u_{cm1} + α'_{cmK} \cdot Δt_2$ => $Δt_2 = \frac{3}{10}$ => $t_2 = t_1 + \frac{3}{10}$ => $t_2 = 0,8$ s

Δ4 Υπολογίζω την απόσταση που διανύει ο κύλινδρος από $t = 0$ εώς $t_1 = 0,5$ s.

$Δx_1 = \frac{1}{2} α_{cmK} \cdot t_1^2$ => $Δx_1 = 0,25$ m

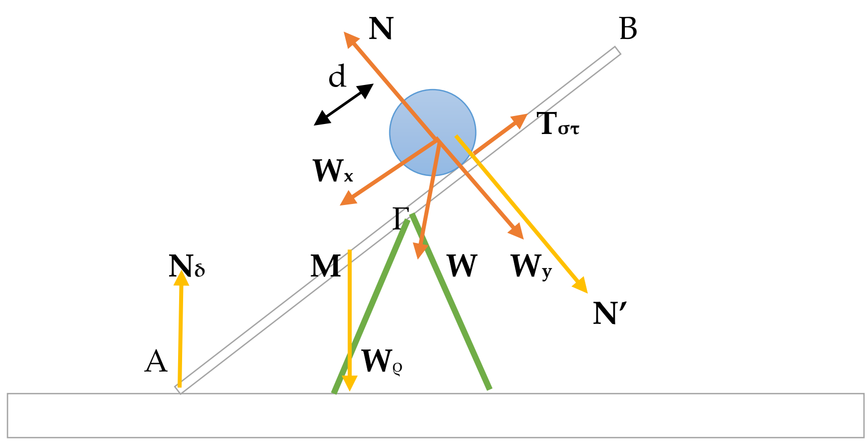
Υπολογίζω την απόσταση που διανύει ο κύλινδρος από $t_1 = 0,5$ σ εώς $t_2 = 0,8$ s.

$Δx_2 = u_{cm1} \cdot Δt_2 - \frac{1}{2} \cdot α'_{cmK} \cdot Δt_2^2$ => $Δx_2 = 0,15$ m

Άρα, το συνολικό διάστημα που διανύει ο κύλινδρος είναι;

$Δx_{ολ} = Δx_1 + Δx_2 = 0,4$ m

Δ4



Ροπές στη ράβδο ως προς το σημείο Γ δημιουργούν οι δυνάμεις $N_δ$, η N′ και η $W_ρ$.

Η N′ είναι η αντίδραση της N, οπότε N′ = N

Για τον κύλινδρο έχουμε: $ΣF_y = 0 \Rightarrow N - W_y = 0 \Rightarrow N = M_κ gσυνφ \Rightarrow N = N' = 4$ N

Η ράβδος θα ανατραπεί αν μηδενιστεί η $N_δ$ που δέχεται η σανίδα από το δάπεδο.

Παρατηρούμε ότι ο κύλινδρος έχει ξεπεράσει το σημείο Γ κατά d, όπου:

$D = Δx_{ολ} - ΓΔ = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$ m

Για την απόσταση ΜΓ (όπου Μ τοι μέσο της σανίδας), έχουμε

$ΜΓ = 2 - ΓΒ = 0{,}5$ m

Για την ισορροπία της σανίδας τη στιγμή $t_2 = 0{,}8$ s που σταματά ο κύλινδρος, ισχύει:

$Στ = 0 \Rightarrow N' \cdot d - M \cdot g \cdot ΜΓ \cdot συνφ + N_δ \cdot ΓΑ = 0 \Rightarrow N_δ = \frac{6}{ΓΑ} \neq 0$

άρα η ράβδος δεν ανατρέπεται.

Βαγγέλης Γεωργακάκης
Φυσικός